Cours bio statistique _ 1er année médecine

LA LOI BINOMIALE

DR Moussaoui Hiba

Semep CHU de Sétif

1. RAPPEL : LA LOI DE BERNOULLI

Soit une variable qualitative dichotomique : 2 modalités

Présence et absence d'une caractéristique (maladie)
Succès ou échec

Variable = x

x = 1: Présence de la caractéristique (sujet malade)

x = 0 : Absence de la caractéristique (sujet indemne)

Probabilité de maladie : $p\ (x = 1) = p$

Probabilité de santé : $p\ (x = 0) = 1 - p = q$

$$p + q = 1$$

Moyenne de la variable x =

$$\sum x_i \, p\,(x = x_i) = 1 \times p\,(x = 1) + 0 \times p\,(x = 0) = p$$

Variance de la variable x = $\sum x_i^2 \, p\,(x = x_i) - p^2$

$$= 1^2 \times p\,(x = 1) + 0^2 \times p\,(x = 0) - p^2$$

$$= p - p^2 = p\,(1-p) = pq$$

Variance de la variable x = $$\frac{n_p\,(1 - p)^2 + n_q\,(0 - p)^2}{n}$$

$$= pq^2 + qp^2 = pq\,(q + p) = pq$$

Exemple :

Série de 20 sujets dont 15 malades et 5 indemnes
15 fois x = 1 et 5 fois x = 0

- **Moyenne m :**

$$m = \sum x_i / n = 15 / 20 = 0{,}75$$

$$m = \sum (n_i / n)\, x_i = \sum f_i\, x_i = (15 / 20) \times 1 + (5 / 20) \times 0 = 0{,}75$$

$$= \sum xi\, p\,(x = x_i) = 1 \times p\,(x = 1) + 0 \times p\,(x = 0) = p$$

$$= \sum x_i\, p\,(x = x_i) = 1 \times 0{,}75 + 0 \times 0{,}25 = 0{,}75$$

- **Variance s² :**

$$s^2 = \frac{\sum n_i (x_i - m)^2}{n} = \frac{15 \times (0{,}25)^2 + 5 \times (-\,0{,}75)^2}{20} = \frac{0{,}93 + 2{,}81}{20} = 0{,}18$$

$$pq = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}18$$

2. SITUATION CARACTERISEE PAR UNE LOI BIONOMIALE

Variable qualitative dichotomique
Echantillon de n sujets
P : Probabilité de survenue d’un événement
Q : Probabilité de non survenue d’un événement = 1 – P = Q

3. PARAMETRES D’UNE LOI BIONOMIALE

B (n,P)
x : Nombre de sujets présentant la modalité
p = x / n
Plusieurs tirages : **p suit une loi binomiale de :**

- Moyenne p (np)
- Variance pq/n (npq)
- Ecart-type : √pq/n (√npq)

4. CALCUL DES FREQUENCES

Echantillon de n sujets
Nombre de sujets présentant la modalité x varie entre **0 et n**
Probabilités correspondantes (fréquences simples) :

$$f(x) = C_n^x \; P^x \; Q^{n-x}$$

$$C_n^x = \text{Symbole d'analyse combinatoire} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

n! = Factorielle n
4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24
5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120
0! = 1 par définition

Triangle de Pascal

n	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		1								
1		1	1							
2		1	2	1						
3		1	3	3	1					
4		1	4	6	4	1				
5		1	5	10	10	5	1			
6		1	6	15	20	15	6	1		
7		1	7	21	35	35	21	7	1	
8		1	8	28	56	70	56	28	8	1

Exemple : Sexe à la naissance

Echantillon de 8 naissances : n = 8

P = ½ = 0,5

Probabilité d'avoir :

- ✓ 0 filles et 8 garçons : $p = C_8^0 (0,5)^0 (0,5)^8 = 0,004$
- ✓ 1 fille et 7 garçons : $p = C_8^1 (0,5)^1 (0,5)^7 = 0,031$
- ✓ 2 filles et 6 garçons : $p = C_8^2 (0,5)^2 (0,5)^6 = 0,109$
- ✓ 3 filles et 5 garçons : $p = C_8^3 (0,5)^3 (0,5)^5 = 0,219$
- ✓ 4 filles et 4 garçons : $p = C_8^4 (0,5)^4 (0,5)^4 = 0,273$
- ✓ 5 filles et 3 garçons : $p = C_8^5 (0,5)^5 (0,5)^3 = 0,219$
- ✓ 6 filles et 2 garçons : $p = C_8^6 (0,5)^6 (0,5)^2 = 0,109$
- ✓ 7 filles et 1 garçon : $p = C_8^7 (0,5)^7 (0,5)^1 = 0,031$
- ✓ 8 filles et 0 garçons : $p = C_8^8 (0,5)^8 (0,5)^0 = 0,004$

Moyenne = n P = 8 x 0,5 = 4 filles

Ecart-type = $\sqrt{n PQ} = \sqrt{8 \times 0,5 \times 0,5} = 1,41$

Table de la loi binomiale

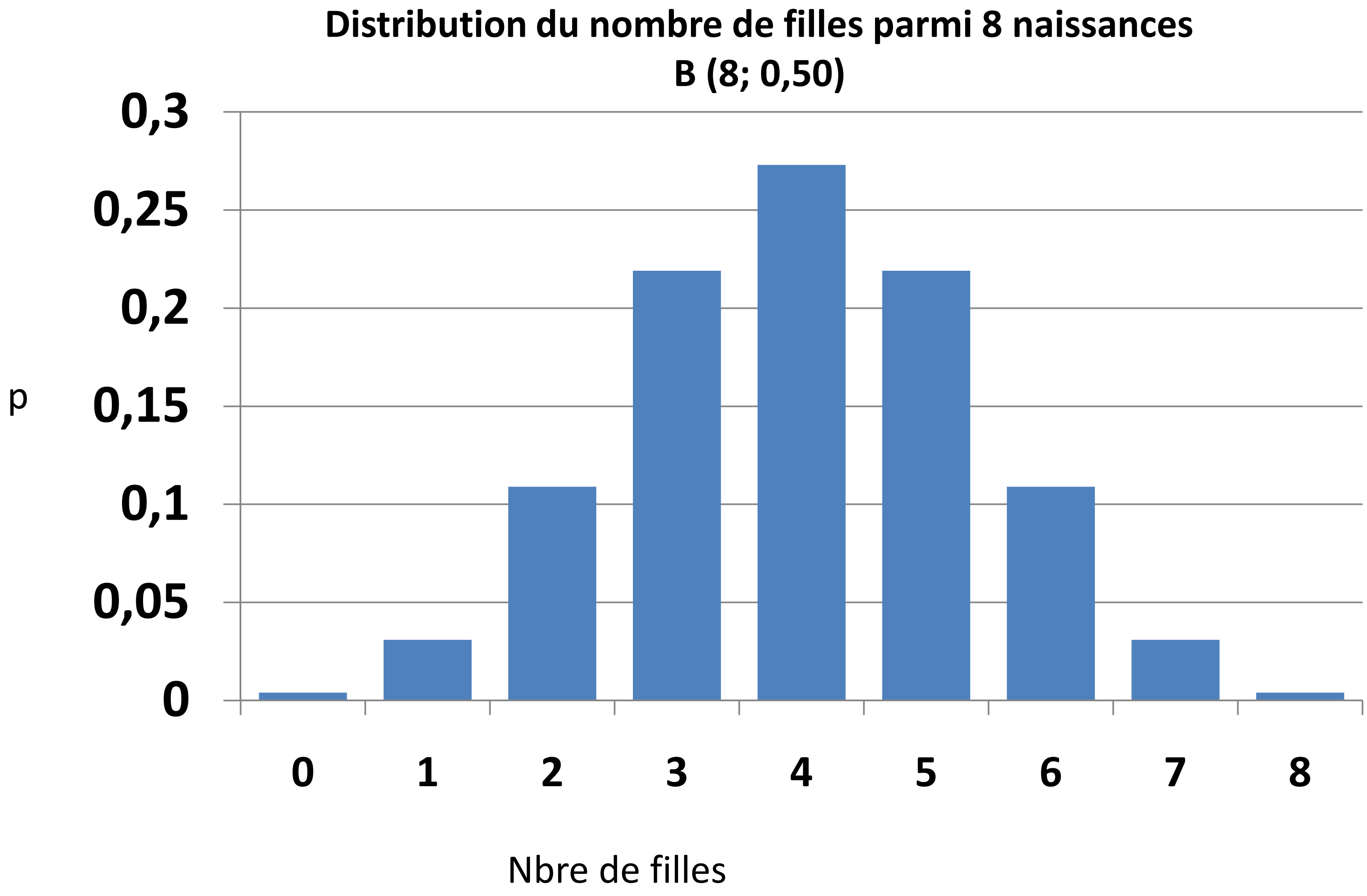
		p=									
n	r	0,0500	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156

n	r	p= 0,0500	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020

Evénements mutuellement exclusifs :

Probabilité d'observer 2 ou 3 filles = 0,109 + 0,219 = 0,328

Probabilité d'observer au moins 7 filles = 0,031 + 0,004 = 0,035

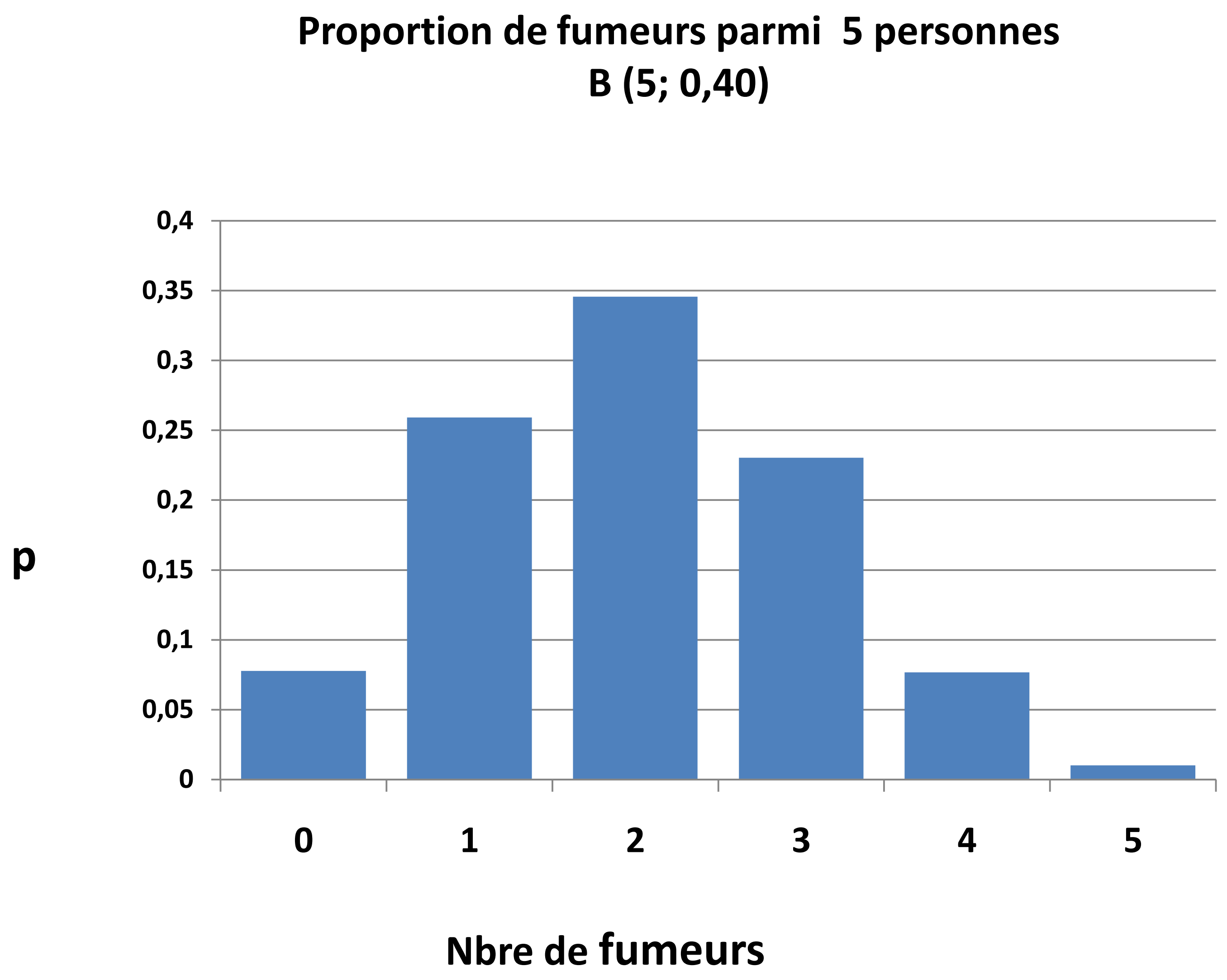


Proportion de fumeurs parmi 5 personnes
B (5; 0,40)

		p=									
n	r	0,0500	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0.7290	0.6141	0.5120	0,4219	[illegible]	[illegible]	0,2160	0,1664	0,1250
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,4219	0,4410	0,4436	[illegible]	0,4084	0,3750
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1890	0,2389	[illegible]	0,3341	0,3750
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0270	0,0429	[illegible]	0,0911	0,1250
4	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2401	0,1785	[illegible]	0,0915	0,0625
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156

0	0,0778
1	0,2592
2	0,3456
3	0,2304
4	0,0768
5	0,0102

Moyenne = n P = 5 x 0,4 = 2 fumeurs
Ecart-type = √ n PQ = √ 5 x 0,4 x 0,6 = 1,09


Proportion de fumeurs parmi 5 personnes
B (5; 0,40)
p
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
1
2
3
4
5
Nbre de fumeurs

5. DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

Intervalle comprenant 95 % des observations

0,0039
0,0313
0,1094
0,2188
0,2734
0,2188
0,1094
0,0313
0,0039

1 – 7

Distribution du nombre de filles parmi 8 naissances
B (8; 0,50)

0 – 4

0,0778
0,2592
0,3456
0,2304
0,0768
0,0102

Proportion de fumeurs parmi 5 personnes
B (5; 0,40)

6. AJUSTEMENT D’UNE DISTRIBUTION OBSERVEE A UNE LOI BINOMIALE

Distribution du nombre de filles chez 593 familles de trois enfants

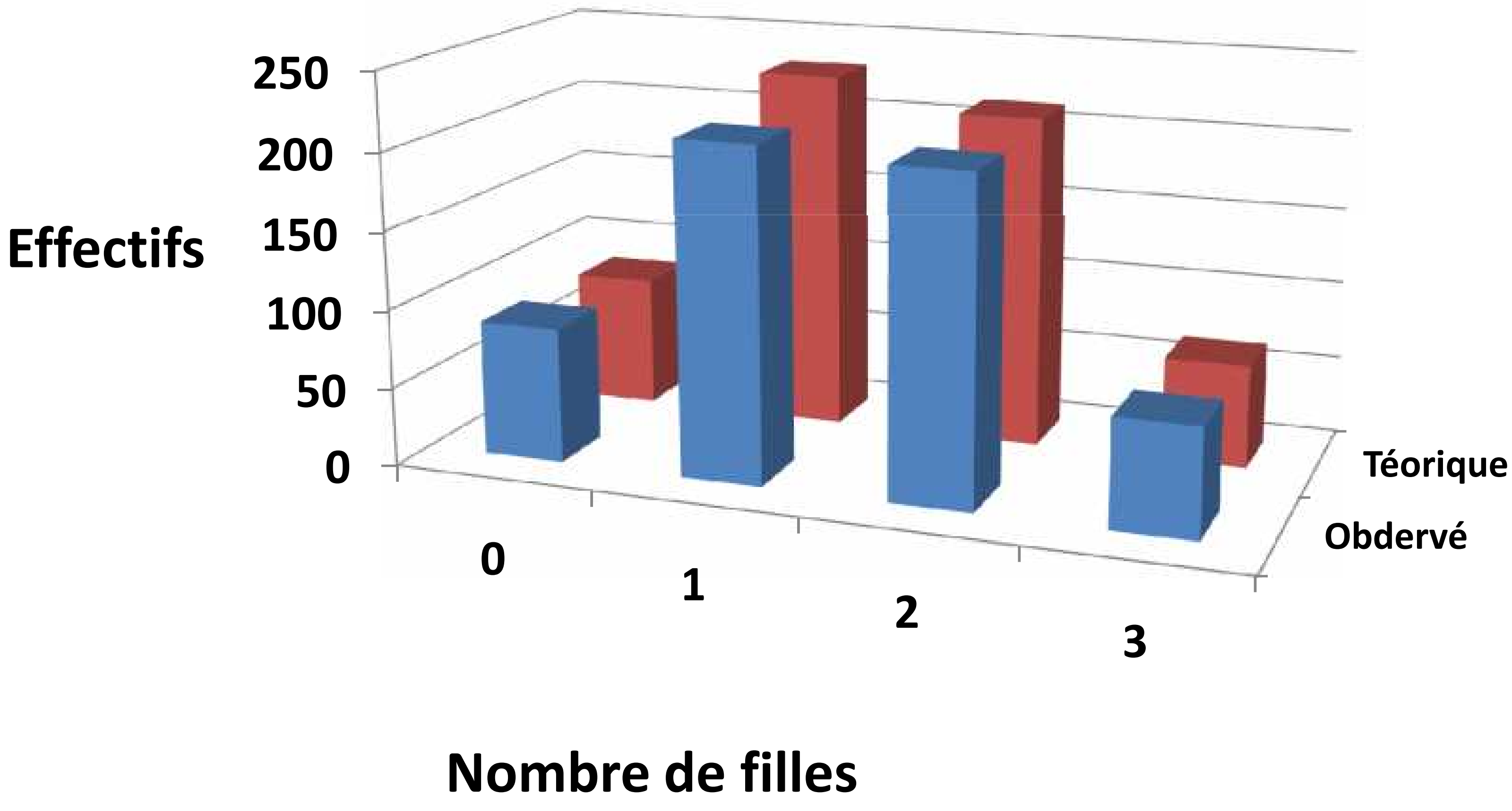
Nombre de filles	Effectif	Effectif théorique
0	86	83,6
1	223	230,7
2	215	212,9
3	69	65,8
Total	**593**	**593**

$$\text{Nombre moyen de filles} = \frac{(86 \text{ x } 0) + (223 \text{ x } 1) + (215 \text{ x } 2) + (69 \text{ x } 3)}{593} = 1,45$$

Proportion de filles dans une famille p = 1,45 / 3 = 0,48

B (3; 0,48) :

- 0 filles : 0,141
- 1 fille : 0,389
- 2 filles : 0,359
- 3 filles : 0,111



7. APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE PAR LA LOI NORMALE

Loi binomiale **asymétrique** autour de la moyenne

Sauf dans le cas p = q = 0,50

Asymétrie négligeable en cas de **grands effectifs**

Remplacement de la variable **qualitative** par une variable **continue ou discrète**

Conditions :

np et nq ñ 5