

Cours bio statistique _ 1^{er} année médecine

LA LOI DE POISSON

*Dr Moussaoui Hiba
Semep CHU Sétif*

1. GENERALITES

Issue de la loi binomiale

Une des deux modalités très rare

Intervalle de lieu de temps ou de volume

- Nombre d'accidents de travail par mois
- Nombre de malformations par année
- Nombre de globules blancs dans une solution

2. PARAMETRES DE LA LOI DE POISSON

x : Nombre de sujets présentant la modalité

$$p = x / n$$

- Moyenne np (p)
- Variance npq

p tend vers 0 et q tend vers 1: - Variance np (p)

Loi de poisson : un seul paramètre :
Moyenne = Variance

Exemple :

Loi de poisson

Nombre d'accidents de travail pour une catégorie d'ouvriers = 2 / mois

Moyenne = 2

Nombre d'accidents de travail pour une catégorie d'ouvriers = 5 / mois

Moyenne = 5

3. CALCUL DES FREQUENCES

Echantillon de n sujets

Nombre de sujets présentant la modalité x varie entre **0 et n**

Probabilités correspondantes (fréquences simples) :

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

e = 2,7183

Table de la loi de poisson

Probabilité
d'observer 3
accidents dans une
distribution de
poisson de
moyenne 2:

$$e^{-2} \frac{2^3}{3!}$$

$$f(x) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = 0,1804$$

Probabilité d'observer
5 accidents :

$$f(x) = \frac{e^{-2} 2^5}{5!} = 0,0361$$

r	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6066	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3679
1	0,0906	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3669	0,3679	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,0613
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0153
5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0031
6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0005
7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
8											0,0000
λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353	
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707	
2	0,2011	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707	
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804	
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902	
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361	
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120	
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034	
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009	
9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	
10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
11										0,0000	
λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	
0	0,1190	0,1100	0,1000	0,0907	0,0821	0,0740	0,0672	0,0609	0,0550	0,0494	
1	0,2503	0,2400	0,2300	0,2177	0,2052	0,1931	0,1812	0,1703	0,1596	0,1494	
2	0,0063	0,02681	0,02652	0,02613	0,02566	0,02510	0,02450	0,02384	0,02314	0,02240	
3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240	
4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680	
5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008	
6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504	
7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216	
8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081	
9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027	
10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	
11							0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	
12								0,0000	0,0000	0,0001	
13									0,0000	0,0001	
λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9	
0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	
1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	
2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	
3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	
4	0,1336	0,1600	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	
5	0,0663	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	
6	0,0275	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	
7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	
8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	
9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	
10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1185	
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	
12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	
13			0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	

	2	
0 accidents	0,1353	<p>Valeurs critiques</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;">0,0165</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;">0,0045</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;">0,0011</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;">0,0002</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 2px;">0,0000</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0,0000</div>
1 accident	0,2707	
2 accidents	0,2707	
3 accidents	0,1804	
4 accidents	0,0902	
5 accidents	0,0361	
6 accidents	0,0120	
7 accidents	0,0034	
8 accidents	0,0009	
9 accidents	0,0002	
10 accidents	0,0000	
11 accidents	0,0000	

4. AJUSTEMENT D'UNE DISTRIBUTION OBSERVEE A UNE LOI DE POISSON

Distribution du nombre journalier d'accidents de la route pendant une durée de 98 jours

Nombre d'accidents par jour	Effectifs observés	Effectifs théoriques
0	40	39
1	35	36
2	15	17
3	6	5
4	2	1
Total	98	98

$$\text{Nombre moyen} = \frac{(40 \times 0) + (35 \times 1) + (15 \times 2) + (6 \times 3) + (2 \times 4)}{98} = 0,93$$

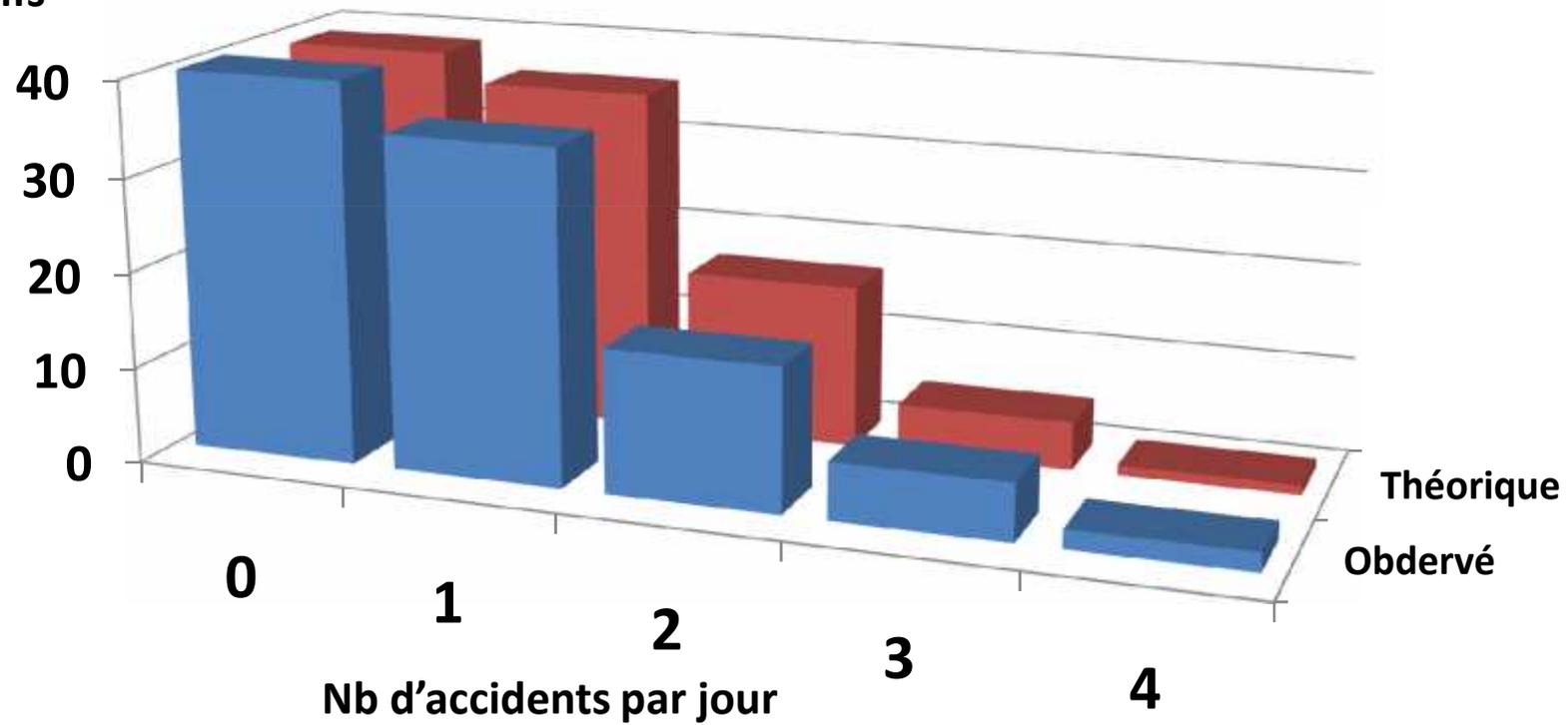
$$\text{Variance} = \frac{40 \times (0 - 0,93)^2 + 35 \times (1 - 0,93)^2 + 15 \times (2 - 0,93)^2 + 6 \times (3 - 0,93)^2 + 2 \times (4 - 0,93)^2}{98}$$

$$\text{Variance} = 0,98$$

Probabilités correspondantes :

- ❖ 0 accidents : 0,3951
- ❖ 1 accident : 0,3669
- ❖ 2 accidents : 0,1703
- ❖ 3 accidents : 0,0527
- ❖ 4 accidents : 0,0122

Effectifs



4. APPROXIMATION DE LA BINOMIALE PAR LA LOI DE POISSON

Conditions :

- $n > 50$
- $p < 10 \%$

Exemple : Structure avec le nombre moyen d'accouchement par mois = 1 000

Fréquence des malformations 0,2 %

- Loi binomiale : $B(1\ 000 ; 0,002)$
- Loi de poisson : $P(2)$

Probabilité d'observer 4 malformations en un mois = 0,0902

Sur une période de 2 mois : $P(4)$ et $B(2\ 000; 0,002)$